Algèbre de Boole – Equations logiques

L'algèbre de Boole (du nom du mathématicien anglais *Georges Boole 1915 - 1864*) est une algèbre se proposant de traduire des signaux en expressions mathématiques. Pour cela, on définit chaque signal élémentaire par des variables logiques et leur traitement par des fonctions logiques. Des méthodes (table de vérité) permettent de définir les opérations que l'on désire réaliser, et à transcrire le résultat en une expression algébrique. Grâce à des règles, ces expressions peuvent être simplifiées. Cela va permettre de représenter grâce à des symboles un circuit logique, c'est-à-dire un circuit qui schématise l'agencement des composants de base (au niveau logique) sans se préoccuper de la réalisation.

III-1 <u>Définitions</u> :

Etat: Les états logiques sont représentés par 0 et 1.

- **Variable**: C'est une grandeur représentée par un symbole, qui peut prendre deux états (0 ou 1).
- **Fonction**: Elle représente un groupe de variables reliées par des opérateurs logiques.

III-1.1 <u>Notions d'états</u> :

On peut associer à un grand nombre de phénomènes physique, un état logique Exemple : Porte ouverte/fermée ; voyant éclairé/éteint On associe généralement à l'état logique 1 la situation actionné du composant.

Boutons et capteurs :

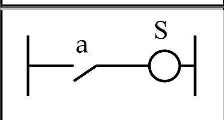
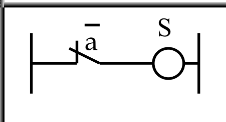
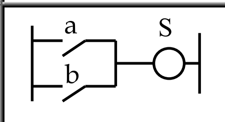
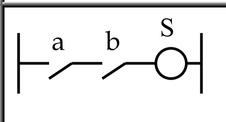
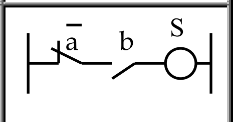
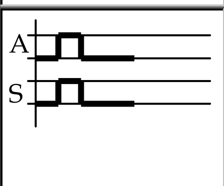
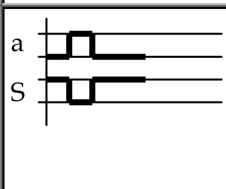
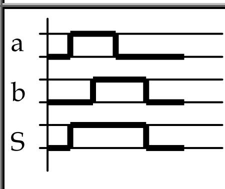
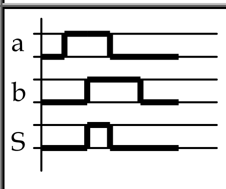
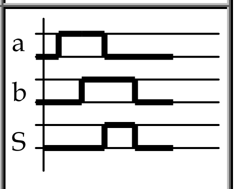
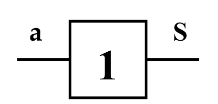
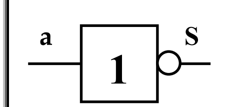
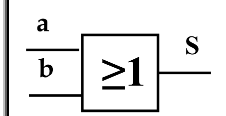
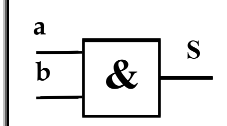
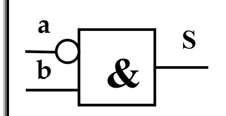
	Contact à fermeture		Contact à ouverture	
état physique	actionné	non actionné	actionné	non actionné
état électrique	passant	non passant	non passant	passant
état logique	1	0	0	1

Actionneurs :

	actionneur	
état physique	en fonction	ne fonctionne pas
état logique	1	0

III-1.2 <u>Fonctions logiques fondamentales</u> :

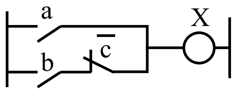
Oui ; non ; ou ; et ; inhibition

Fonctions	oui	non	ou	et	inhibition
Equations	$S=a$	$S=\overline{a}$	$S=a+b$	$S=a*b$ $S=a.b$ $S=ab$	$S=\overline{a}.b$
Table de vérités	a | S 0 | 0 1 | 1	a | S 0 | 1 1 | 0	b | a | S 0 | 0 | 0 0 | 1 | 1 1 | 1 | 1 1 | 0 | 1	b | a | S 0 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1 1 | 0 | 0	b | a | S 0 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 0 1 | 0 | 1
Schémas électriques					
Chronogrammes					
Symbole logiques					

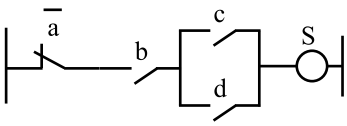
II-1.3 <u>Circuits électriques</u> :

III-1.3.1 <u>Réalisation d'un circuit à partir d'une équation</u> :

$X = (a + b \bar{c})$



III-1.3.2 <u>Mise en équation d'un circuit</u> :

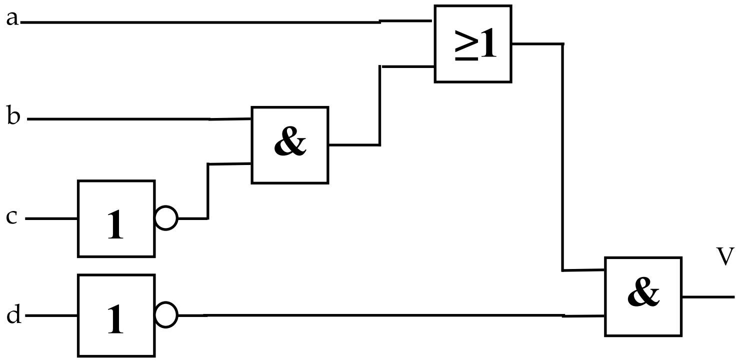


$S = \bar{a}\, b\, (c+d)$

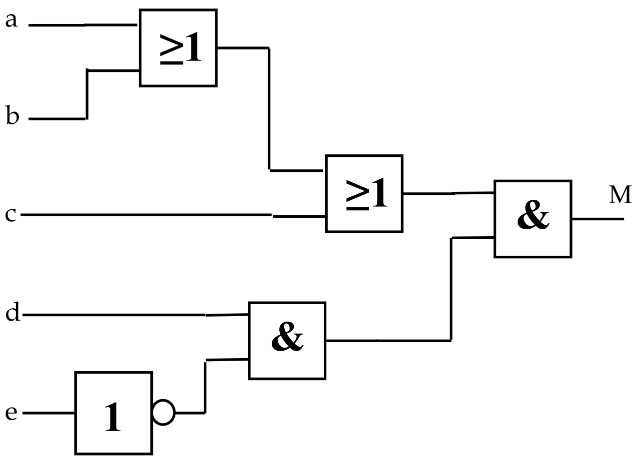
III-1.4 <u>Circuits logiques</u> :

III-1.4.1 <u>Réalisation d'un logigramme à partir d'une équation</u> :

$V = (a+b \bar{c})\, \bar{d}$



III-1.4.2 <u>Mise en équation d'un logigramme</u> :



$M = (a+b+c)\, d\, \bar{e}$

III-2 <u>Fonctions logiques complémentaires</u> :

III-2.1 <u>Théorème de De Morgan</u> :

Le complément d'un produit est égal à la somme des thermes complémentés.

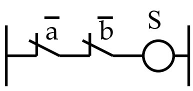
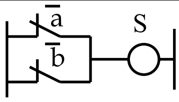
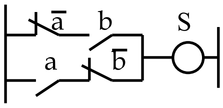
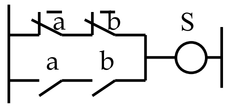
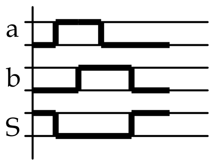
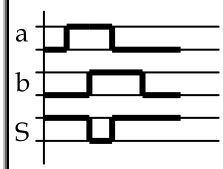
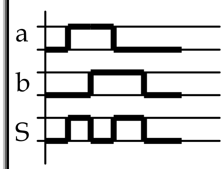
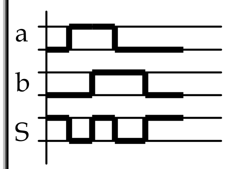
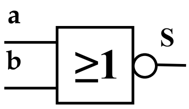
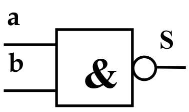
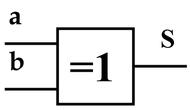
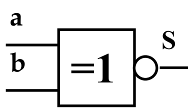
$S = a.b \Rightarrow \bar{S} = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

Le complément d'une somme est égal au produit des thermes complémentés.

$S = a + b \Rightarrow \bar{S} = \overline{a + b} = \bar{a} \,.\, \bar{b}$

III-2.2 **<u>Tableaux des fonctions complémentaires</u> :**

Non ou, non et, ou exclusif, non ou exclusif

Fonctions	Non ou (Nord)	Non et (Nand)	Ou exclusif (Xor)	Non oux
Equations	$S = \overline{a+b} = \bar{a} . \bar{b}$	$S = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$	$S = a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$	$S = \overline{a \oplus b} = \bar{a}.\bar{b} + a.b$
Table de vérités	b a S 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0	b a S 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1	b a S 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1	b a S 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0
Schémas électriques				
Chronogrammes				
Symbole logiques				

III-3 **<u>Propriétés des fonctions logiques</u> :**

Propriétés	OU	ET
Commutativité	$a + b = b + a$	$a . b = b . a$
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a . b) . c = a . (b . c)$
Distributivité	$a + (b . c) = (a + b) . (a + c)$	$a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$
Complémentarité	$a + \bar{a} = 1$	$a . \bar{a} = 0$
Idempotence	$a + a = a$	$a . a = a$
Elément neutre	$a + 0 = a$ $a + 1 = 1$	$a . 0 = 0$ $a . 1 = a$
Absortion	$a + (a . b) = a$ $a + (\bar{a} . b) = a + b$	$a . (a + b) = a$ $a . (\bar{a} + b) = a . b$

III-4 **<u>Simplification des équations logiques</u> :**

Dès que l'on dispose de l'expression d'un circuit logique, il peut être possible de la minimiser pour obtenir une équation comptant moins de termes ou de variables par terme. Cette simplification peut se faire de deux façons différentes :

- par l'utilisation des propriétés des fonctions logiques

- par l'utilisation des tableaux de Karnaugh

- Depuis une table de vérité

III-4.1 **Simplification des équations logiques par l'utilisation des fonctions logiques** :

$$S1 = abc + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc$$
$$S1 = ab(c + \bar{c}) + \bar{a}b(\bar{c} + c)$$
$$S1 = ab(1) + \bar{a}b(1)$$
$$S1 = b(a + \bar{a})$$
$$S1 = b(1)$$
$$S1 = b$$

$$S2 = a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + abc + ab\bar{c}$$
$$S2 = a\bar{c} + ab$$
$$S2 = a(\bar{c} + b)$$

$$S3 = abc + c(a \oplus b)$$
$$S3 = c(a + b)$$

$$Q = (a + b + c)(a + b + c)(a + b + c) = a + b + c$$
$$R = abc + ab(\overline{ac}) = ab$$
$$S = \bar{a}c(\overline{\bar{a}b}) + a\bar{b}c = \bar{b}c$$
$$T = abc + abc + abc = abc$$
$$U = (\bar{a} + b)(a + b + d)\bar{d} = b\bar{d}$$

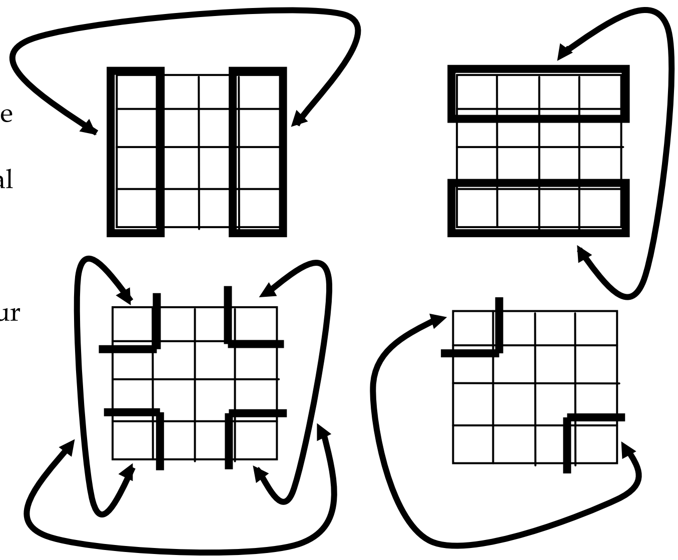
III-4.2 **Simplification des équations logiques par l'utilisation des tableau de KARNAUGH** :

III-4.2.1 **Mise en place** :

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Par des moyens semi graphiques :
- Table à deux entrées (lignes-colonnes) ;
- On équilibre les variables sur les lignes et les colonnes pour s'approcher d'un tableau carré ;
- Les lignes et les colonnes sont codées en code GRAY ;
- Chaque case contient l'état de la sortie (0 ou 1) pour les entrées correspondantes.

III-4.2.2 **Règles de simplification** :



Constituer des groupe de « 1 »
- Ces groupes de taille maximale, doivent être carré ou rectangulaire ;
- Ils doivent contenir un nombre de cases égal à une puissance de deux ;
- Les bords de la table sont adjacent ;
- On ne retient que les variables dont l'état logique d'entré n'est pas modifié à l'intérieur du groupement ;
- Les variables d'un même groupement sont liées par une fonction **ET**, les groupements sont liés par des fonctions **OU**.

III-4.2.3 **Simplifier les équations suivantes** :

$$T1 = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz = y$$
$$T2 = x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz + xy\bar{z} = x(y + \bar{z})$$
$$T3 = yw + zw + \bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + xy\bar{z} = w + y\bar{z}$$
$$T4 = xyz + z(x\bar{y} + \bar{x}y) = z(x + y)$$

III-4.2.4 **<u>Depuis une table de vérité</u> :**

c	b	a		L1	L2	L3	L4
0	0	0		1	0	1	0
0	0	1		1	0	0	0
0	1	1		0	1	1	0
0	1	0		0	1	1	0
1	1	1		0	0	1	1
1	1	0		0	0	1	1
1	0	1		1	1	0	1
1	0	0		1	1	1	1

$$L1 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c$$
$$L1 = \bar{b}\bar{c} + \bar{b}c$$
$$L1 = \bar{b}$$

$$L2 = ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c$$
$$L2 = b\bar{c} + \bar{b}c$$
$$L2 = b \oplus c$$

$$\overline{L3} = a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$$
$$\overline{L3} = a\bar{b} \Rightarrow L3 = \bar{a} + b$$

$$L4 = \bar{a}bc + abc + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c$$
$$L4 = bc + \bar{b}c$$
$$L4 = c$$

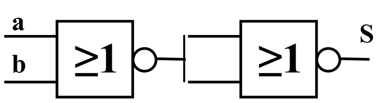
III-5 **<u>Opérateurs ou portes logique nor et nand</u> :**

III-5.1 **<u>Réalisation des fonctions OU</u> :**

$S = a + b$

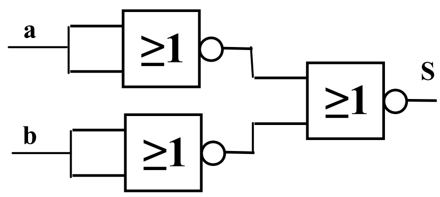
NOR

$S = \overline{\overline{a+b}}$



NAND

$S = \overline{\bar{a}+\bar{b}}$

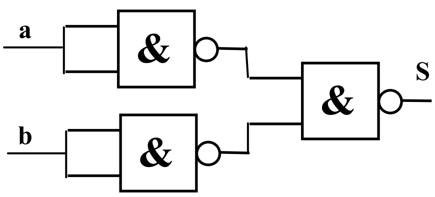


III-5.2 **<u>Réalisation des fonctions ET</u> :**

$S = a \times b$

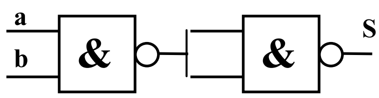
NOR

$S = \overline{\bar{a} \times \bar{b}}$



NAND

$S = \overline{\overline{a \times b}}$

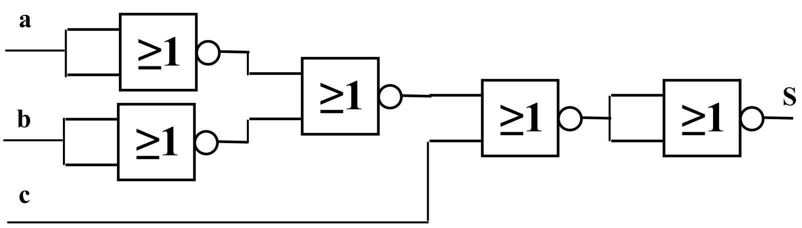


III-5.3 **<u>Méthodes de résolution</u> :**

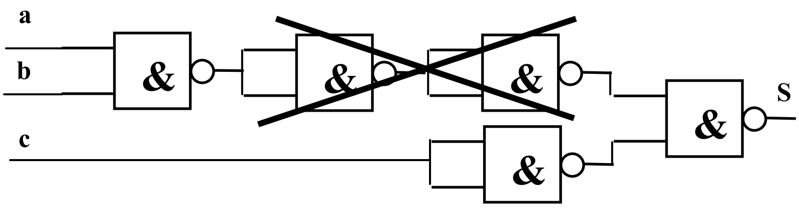
III-5.3.1 **<u>A partir du logigramme</u> :**

$S = a \times b + c$

NOR



NAND



III-5.3.2 <u>A partir des équations logiques</u> :

$S = a \times b + c$

NOR

$$S = \overline{\overline{\overline{\overline{a}+\overline{b}}+c}}$$

NAND

$$S = \overline{\overline{\overline{\overline{a \times b}}} \times \overline{c}}$$

Si il y a deux barres sur un seul terme, on les supprime.
Si il y a trois barres de même longueur sur plusieurs termes, on en supprime deux.

III-5.3.3 <u>Exercices</u> :

$S1 = \overline{a} \times (b + c)$

NOR

$$S = \overline{\overline{\overline{a}} + \overline{\overline{\overline{(b+c)}}}}$$

NAND

$$S = \overline{\overline{\overline{a} \times \overline{\overline{b} \times \overline{c}}}}$$

$S2 = a \oplus b = \overline{a}b + a\overline{b}$

NOR

$$S = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{a}} + \overline{b}} + \overline{\overline{a} + \overline{\overline{b}}}}}$$

NAND

$$S = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{a} \times b}}} \times \overline{\overline{\overline{a \times \overline{b}}}}}$$